독립심화학습 4주차

2017103580 사회학과 김정운

특정 현상에 대한 미분방정식에 optimal control problem으로 state를 제어함으로써 현실에서의 문제를 해결하고자 한다면, equilibrium의 stability를 따지는 것은 효율적인 control을 위해 필요하다고 했었다. 이전의 Jaccobian, phase-portrait 외 stability를 따지는 한 가지 방법은 Lyapunov function을 활용하는 것이 있다. dx/dt=f(t,x(t),u(t)), x(t0)=x0, u(t0)=0, u(t)는 U의 원소라는 미분방정식이 있다고 가정하자. 만약 어느 state x (t)에 대한 함수 L(x(t))가 ‘L(x(t))>=0 for all state x(t)(등호는 x(t)=y(t)일 때 성립), dL/dt<=0 for all x(t) except x(t)=y(t)’을 만족한다고 하면, L을 lyapunov function이라고 한다. 이때 y(t)를 lyapunov stable(local stability의 특수한 경우) state라고 한다. 만약 도함수에 대한 부등식이 strictly 하게 성립하면 asymptotically stable이라고 하며, dL/dt>0이면 unstable하다고 한다.

Lyapunov function을 통해 stability를 분석하는 것은 몇 가지 장점이 있는데, 우선 함수 L이 위의 조건만을 만족하기만 하면 된다. 즉, L의 형태에 대한 제약조건이 없기 때문에 연구자의 자유도가 높으며, Lyapunov function이 유일하지 않을 수 있으며 그럴 필요가 없다는 것이다. 또한 phase portrait와 달리 데이터에 의존하지 않기 때문에 stability에 대한 엄밀한 증명이 가능하다. 또한 도함수만을 계산하면 되기 때문에, 쉽게 stability를 증명할 수 있다.

다만 위의 조건을 만족하는 lyapunov function을 찾는 것 자체가 쉽지 않으며, 그러한 함수가 존재하지 않다는 것을 직접적으로 증명하기도 어렵다. 또한 equilibrium이 2개 이상인 경우에는 lyapunov function을 통해 이퀼리브리엄의 stability를 보장할 수 없는데, lyapunov function은 수렴한다는 사실만을 보장할 뿐 어떤 양상으로 수렴한다는 것에 대한 정보를 갖지 않기 때문이다. 이를 해결할 수 있는 방법 중 하나는 equilibrium이 오직 1개이거나, 2개 이상이어도 특정한 해로만 수렴한다는 것을 증명하는 것이다.

이러한 정리에 대한 증명은 다음과 같이 쉽게 할 수 있다. 우선 B(입실론, y(t))를 y(t)의 입실론-ball이라고 한다면, 함수 L은 연속함수이고 입실론-ball은 compact하기 때문에 L은 B(입실론, y(t))에서 minimum을 갖게 된다. L(y(t))=0이고 L은 연속함수이기 때문에, B(입실론, y(t))의 모든 원소 x0에 대해 L(x0)<b를 만족하는 b가 존재한다. x(t,x0)는 초기값 x0에 대응되는 미분방정식의 해라고 한다면, dL/dt<0이기 때문에 L(x(t,x0))<=L(x(0))<b가 성립한다. L이 연속함수이기 때문에 x(t,x0)는 B(입실론, y(t))에 포함되며, 따라서 y(t)는 local stability를 갖는다고 할 수 있다.

다른 방법으로도 해당 정리를 증명할 수 있는데, 우선 결론 x(t)가 0으로 수렴하지 않는다고 가정하자(이전에는 x(t)가 y(t)로 수렴한다고 했는데, 이는 x(t)-y(t)가 0으로 수렴한다는 것과 동치이기 때문에 일반성을 잃지 않는다). L(x(t))는 연속함수이며 x(t)는 0으로 수렴하지 않기 때문에, L에 대한 가정과 결합하여 어느 한 입실론>0에 대해 입실론<=L(x(t))<=L(x(0))가 성립해야 한다. 해당 부등식을 만족하는 x(t)들의 집합을 C라고 한다면, C는 closed and bounded하기 때문에 compact하다. 이와 dL/dt가 연속함수라는 사실이 결합하여 sup(dL(x(t)/dt)=a<0를 정의할 수 있다.. 이들을 종합하면 L(x(T))=L(x(0))+적분(0,T,dL/dt)<L(x(0))+aT가 성립하는데, T가 L(x(0))/a보다 크면 L(x(T))<0가 성립해야 한다. 하지만 L(x(t))>0 for all x(t) except x(t)=0라는 가정과 모순된다. 따라서 x(t)는 0으로 수렴해야 한다.

이러한 lyapunov function은 물리의 에너지 함수를 일반화한 것이라고 할 수 있다. 물리현상에 대한 방정식이 equilibrium 0(힘이 부여되지 않아서 정지된 상태)을 가지고 있으며, 에너지 L(>=0)이 초기에 주어졌으며 추가적으로 에너지가 공급되지 않는다고 하자. 그러면 마찰력 등 외부 요인으로 인해 L(dL/dt<0)이 감소하게 되는데, 이로 인해 equilibrium 0는 asymptotically stable하다.